Title	Automorphic Function ニツイテ（I）
Author(s)	有馬, 喜八郎
Citation	全国紙上数学談話会. 255 p.325-p.346
Issue Date	1943-07-05
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75061
rights	
Note	

1128. Automorphic Function ニツイテ (I)

有馬喜八郎(阪大)

Automorphic function ノ性質, limit-point ノ集合, 解析函數(代數曲線ヲ含メテ) ノ uniformisation 等ニツキノベテ見タイト思ヒマス。マトマッタ順ニ述ベマスノデ系統的ニ重複, 前後スルコトト思ヒマス。

フックス群, フックソイド群ヲマトメテフックソイド群ト呼ブコトニシマス。

第一章

コノ章ニテハフックソイド群ニツイテノ Poincaré, Johansson 等ノヨク知ラレタ定理ヲ後述ヘノ準備トシテ述ベテミマス。

(1) 原点ハ固定点デナイト假定シ, 原点ヲ内部ニ含ム基本領域ヲ σ_0 トシマス。

次ノ二數列ヲ定義ス.

$$0 < r_1 < r_2 \cdots\cdots < r_i \cdots\cdots < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r_n = 1$$

原点ヲ中心トシ σ_0 内ニ含マレル任意ノ円 K_0 ノ半径ヲ R_0 トシ固定シテ考フ。

$$R_0 > R_1 > R_2 \cdots\cdots > R_n \cdots\cdots \qquad \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

原点ヲ中心トシ r_i ヲ半径トスル円ヲ C_i，R_n ヲ半径トスル円ヲ K_nトス。

フックソイド群 Γ ノ要素ヲ S_ρ デ表ハシ $K_n = S_\rho$ ヲ施シテ出来タ円ヲ K_n^ρ デ表ハシ，C_i ト交ハルカ又ハ C_i ノ全ク内部ニアル K_n^ρ ト単位円トデ境界サレタ領域ヲ D_n^i トス。

(2) D_n^i 内ノ任意ノ点 z_0 ヲ *Pole* ニ有スル *green* 函数ヲ $u_n^i(z, z_0)$ トスレバ *Harnack* ノ定理ニヨリ容易ニ $i \to \infty$ ノトキ $u_n^i(z, z_0)$ ハ z_0 ヲ *Pole* ニモツ調和函数 $u_n(z, z_0)$ ニ一様収斂スルコトヲ知ル。

green-gauss ノ定理ニヨリ

$$\sum_{D_n^i, K_n^\rho = ツイテ} \int_{K_n^\rho} \frac{\partial u_n^i(z, z_0)}{\partial n} ds < 2\pi$$

$u_n^i(z, z_0) > u_n(z, z_0)$ 且ツ両函数ハ K_n^ρ ノ周上デ 0

$$\therefore \sum_{D_n^i, K_n^\rho = ツイテ} \int_{K_n^\rho} \frac{\partial u_n(z, z_0)}{\partial n} ds < \sum_{D_n^i, K_n^\rho = ツイテ} \int_{K_n^\rho} \frac{\partial u_n^i(z, z_0)}{\partial n} < 2\pi$$

K_n^ρ ハ $S_{-\rho}$ ($S_{-\rho} \cdot S_\rho = S_\rho S_{-\rho} = 1$) ニテ K_n ニ移ル故

$$\sum_{D_n^i, K_n^\rho = ツイテ} \int_{K_n^\rho} \frac{\partial u_n(z, z_0)}{\partial n} = \sum_{D_n^i, K_n^\rho, \rho = ツイテ} \int_{K_n} \frac{\partial u_n(z S_{-\rho}(z_0))}{\partial n} ds$$

$$\therefore \sum_{D_n^i, K_n^\rho, \rho = ツイテ} \int_{K_n} \frac{\partial u_n(z, S_{-\rho}(z_0))}{\partial n} ds < 2\pi$$

D_n^i ノ境界 K_n ノ ρ ニツイテ

$$\sum_\rho u_n(z, S_{-\rho}(z_0)) = W_n^i(z, z_0) \text{ トオツバ}$$

上式ニヨリ

$$\int_{K_n} \frac{\partial W_n^i(z, z_0)}{\partial n} ds < 2\pi \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

且ツ

$$W_n^{i+1}(z, z_0) \geqq W_n^i(z \cdot z_0) \quad \cdots\cdots (2)$$

K_0 ノ周上デ 0, K_n ノ周上デ 1 ヲトル調和函数ヲ $v(z)$ トスレバ

$$\int_{K_0} W_n^i(z, z_0) \frac{\partial v(z)}{\partial n} ds = \int_{K_n} \frac{\partial W_n^i(z, z_0)}{\partial n} ds$$

(1) ト上式ヨリ

$$\int_{K_0} W_n^i(z, z_0) \frac{\partial v(z)}{\partial n} ds < 2\pi$$

K_0 ノ長サ L ノ周上デ $\dfrac{\partial v(z)}{\partial n} > q > 0$ (q ハ任意ニ固定セル常数), $W_n^i(z, z_0)$ ノ K_0 上デノ最小値ヲ m トスレバ

$$L \cdot q\, m < 2\pi$$

Harnack ノ定理ニヨリ $0 < k < 1$ ナル常数 k ガ定マリ

$$K_0 \text{ ノ周上デ } \quad km < W_n^i(z, z_0) < \frac{1}{k} m$$

$$\therefore \quad W_n^i(z, z_0) < \frac{2\pi}{KLq}$$

上ノコトト(2)ヨリHarnackノ定理ヨリ $W_n^i(z, z_0)$ ハ $S_{-\rho}(z_0)$ ナルPoleヲ除キ調和ナ函數 $W_n(z, z_0)$ ニ一様收斂ス。

$$\therefore \quad W_n(z, z_0) = \sum_{\rho}^{\infty} u_n(z, S_{-\rho}(z_0))$$

S_ρ ハ群 Γ ヲ作ル故 $\quad = \sum_{\rho} u_n(z, S_\rho(z_0))$

Γ ノ任意ノ要素 S トスレバ

$$W_n(z, S(z_0)) = \sum u_n(z, S_\rho S(z_0))$$

$$= \sum u_n(z, S_\rho(z_0)) = W(z, z_0)$$

故ニ $W_n(z, z_0)$ ハ z_0 ヲ変數ト考フレバ automorphic, 同様ニシテ z ニツイテモ然ルコトヲ知ル。

又(1)ヨリ

$$\int_{K_n} \frac{\partial W_n(z, z_0)}{\partial n} ds \leqq 2\pi$$

定義

$$\int_{K_n} \frac{\partial W_n(z, z_0)}{\partial n} = 2\pi \text{ ノトキ第一型(F)}$$

$< 2\pi$ ノトキ第二型(S)ト定義ス。

(3) D_n^i ノ一ツノ境界 K_n^ρ ノ周上デ 1, 他ノ境界デ 0 ナル調和函数ヲ $w_{n,\rho}^i(z)$ トスレバ

$$w_{n,\rho}^i(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{K_n^\rho}\frac{\partial u_n^i(\zeta,z)}{\partial n}ds$$

（ζ ハ K_n^ρ 上ノ点デ ds ハソコデノ線要素ヲ示ス）

D_n^i ノ単位円周上デ 0 他ノ境界上デ 1 トナル調和函数ヲ $w_n^i(z)$ トスレバ, 上式ヨリ

$$w_n^i(z)=\sum_{D_n^i,\,K_n^\rho ニツイテ} w_{n,\rho}^i(z)=\sum_{D_n^i,\,K_n^\rho ニツイテ}\frac{1}{2\pi}\int_{K_n^\rho}\frac{\partial u_n^i(\zeta,z)}{\partial n}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{K_n}\frac{\partial \mathbb{W}_n^i(\zeta,z)}{\partial n}ds$$

$0\leqq w_n^i(z)\leqq w_n^{i+1}(z)\leqq 1$ ナル故 $i\to\infty$ ノトキ $w_n^i(z)$ ハ恒等的ニ 1 トナルカ或ヒハ調和函数 $w_n(z)$ ニ一様収斂ス。

第一型ノトキハ

$$w_n(z)\equiv 1$$

第二型ノトキハ $0\leqq w_n(z)\leqq 1$ ナルコトヲ知ル, 且ツ

$$w_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{K_n}\frac{\partial \mathbb{W}_n(\zeta,z)}{\partial n}ds$$

$\mathbb{W}_n(\zeta,z)$ ハ z ニツイテ automorphic ナル故 $w_n(z)$ モ亦然リ

(4) $\mathbb{V}_n^i(z)=1-w_n^i(z)$ トシ D_n^i ニ於テ

Green - Gauss ノ公式ヨリ

$$\sum_{D_n^i,\, K_n^\rho \text{ニツキ}} \int_{K_n^\rho} \log\frac{1}{|z|} \frac{\partial V_n^i(z)}{\partial n}\, ds$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{\partial \log\frac{1}{|z|}}{\partial n}\, ds = 2\pi$$

原点ヨリ K_n^ρ ヘノ最大, 最短距離ヲ M_ρ, m_ρ トスレバ,
上式ヨリ

$$\sum_{D_n^i,\, \rho \text{ニツキ}} \log\frac{1}{m_\rho} \int_{K_n^\rho} \frac{\partial V_n^i(z)}{\partial n}\, ds > 2\pi$$

$$> \sum_{D_n^i,\, \rho \text{ニツキ}} \log\frac{1}{M_\rho} \int_{K_n^\rho} \frac{\partial V_n^i(z)}{\partial n}\, ds \quad \cdots\cdots (3)$$

第二型ノトキ

$V_n(z) = 1 - w_n(z)$ トスレバ $V_n^i(z) \geqq V_n(z)$,

且ツ K_n^ρ 上デ 0

$$\therefore \int_{K_n^\rho} \frac{\partial V_n^i(z)}{\partial n}\, ds > \int_{K_n^\rho} \frac{\partial V_n(z)}{\partial n}\, ds$$

$$= \int_{K_n} \frac{\partial V_n(z)}{\partial n}\, ds$$

故ニ (3) ヨリ

$$\sum_{D_n^i,\, K_n^\rho,\, \rho \text{ニツイテ}} \log\frac{1}{M_\rho} \leqq \frac{2\pi}{\int_{K_n} \frac{\partial V_n(z)}{\partial n}\, ds} = \text{常}\cancel{\text{数}} \left(\begin{array}{l} n \text{ノミ従属シテ} \\ i \text{ニ従属シナイ} \end{array}\right)$$

故ニ $i \to \infty$ ノトキ 即チ

$$\sum_{p=0}^{\infty} \log \frac{1}{M_p}$$ ハ収斂ス。

第一型ノトキ $\sum_{p=0}^{\infty} \log \frac{1}{m_p}$ ハ発散ス。

今 $\sum_{p=0}^{\infty} \log \frac{1}{m_p}$ ガ収斂シテソノ値ヲAトス。

ε ヲ π ヨリ小ナル任意ノ正数トス。$V(z)$ ヲ K_n ノ周上デ0単位円周上デ1ナル調和函数トス。然ルトキ $V(S_{-p}(z))$ ハ K_n^p ノ周上デ0単位円周上デ1ニナル。

$$\therefore \int_{K_n^p} \frac{\partial V(S_{-p}(z))}{\partial n} ds = \int_{K_n} \frac{\partial V(z)}{\partial n} ds$$

K_n ト単位円トニ囲マレタ領域ニテ Green-Gauss ノ公式ヲ用ヒ

$$\int_{K_n} \log \frac{1}{|z|} \frac{\partial V(z)}{\partial n} ds = \int_{|z|=1} \frac{\partial \log \frac{1}{|z|}}{\partial n} ds = 2\pi$$

K_n ノ半径ハ R_n ナル故上ノ二式ヨリ

$$\int_{K_n^p} \frac{\partial V(S_{-p}(z))}{\partial n} ds = \frac{2\pi}{\log \frac{1}{R_n}} = c$$

K_n^p ガ D_n^i ノ境界ナラバ

$$\int_{K_n^p} \frac{\partial V_n^p(z)}{\partial n} ds < \int_{K_n^p} \frac{\partial V(S_{-p}(z))}{\partial n} ds = c$$

Nヲ充分大キクトリ

$$\sum_{p=N}^{\infty} \log \frac{1}{m_p} < \frac{\varepsilon}{C} \text{ トス.}$$

i ヲ充分大キクトリ D_n^i ノ境界 $= K_n^p$ ($p=0, 1, 2 \cdots\cdots N^i$, 但シ $N^i \geqq N$) ガ属スルモノトス.

$p = 0. 1 \cdots\cdots N$ ニ対シテ $\lim_{i\to\infty} \nabla_n^i(z) \equiv 0$ ヨリ

$$\int_{K_n^p} \frac{\partial \nabla_n^i(z)}{\partial n} ds < \frac{\varepsilon}{A}$$

トオキテヨイコトガ容易ニ分ル。

以上ト (3) 式ヨリ

$$\frac{\varepsilon}{A} \sum_{p=0}^{p=N} \log \frac{1}{m_p} + C \sum_{p=N+1}^{N^i} \log \frac{1}{m_p} > 2\pi$$

然ルニ $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=N} \log \frac{1}{m_p} < A$,

$$\sum_{p=N+1}^{N^i} \log \frac{1}{m_p} < \sum_{p=N+1}^{\infty} \log \frac{1}{m_p} < \frac{\varepsilon}{C}$$

以上ヨリ

$$\frac{\varepsilon}{A} \cdot A + C \cdot \frac{\varepsilon}{C} > 2\pi \qquad \therefore \quad \varepsilon > \pi$$

コレハ不都合ナリ、故ニ $\sum \log \frac{1}{m_p}$ ハ発散ス.

(6) $\log \frac{1}{M_p}$, $\log \frac{1}{m_p}$ ハ $\log \frac{1}{|S_p(z)|}$ ノ K_n 上ニ於ケ

ル最小，最大値デ後者ハ $\rho \neq 0$ ノトキ K_n ノ内部デ調和函數ナル故，ρ ニ無関係ナ常數 $q\ (0 < q < 1)$ ガ存在シ

$$\frac{1}{q}\log\frac{1}{|S_\rho(0)|} > \log\frac{1}{m_\rho} > \log\frac{1}{M_\rho} > q\log\frac{1}{S_\rho(0)}$$

故ニ第一型ノトキハ $\sum_{\rho=1}^{\infty}\log\frac{1}{S_\rho(0)}$ ハ發散ス.

第二型ノトキハ 收斂ス.

第一型ノトキ $\int\frac{\partial W_n(z,z_0)}{\partial n}ds = 2\pi$ ヨリ

$$\frac{1}{2\pi R_0}\int_{K_0} W_n(z,z_0)\,ds = \log\frac{R_0}{R_n}$$

以上ノコトヨリ Harnack ノ定理ニヨリ $n \to \infty$ ノトキ $W_n(z,z_0)$ ハ恒等的ニ ∞ トナル。

第二型ノトキ $u(z,z_0)$ ヲ z_0 ヲ Pole ニモツ單位円ノ Green 函數トス，

$$u(z,z_0) > u_n(z,z_0)$$

$$\therefore\quad u(z,S_\rho(z_0)) > u_n(z\ S_\rho(z_0))$$

$$\log\frac{1}{|S_\rho(z_0)|} = u(0.\ S_\rho(z_0)) > \frac{1}{2\pi R_0}\int_{K_0} u_n(z.\ S_\rho(z_0))\,ds$$

$S_\rho(z_0) \neq 0$ ナル z_0 ニ對シテハ $\sum\log\frac{1}{|S_\rho(0)|}$ ノ收斂ヨリ Harnack ノ定理ニヨリ $\sum\log\frac{1}{|S_\rho(z_0)|}$ ノ收斂スル事

ヲ知ル。

$$\therefore \quad \sum \log \frac{1}{|S_p(z_0)|} > \frac{1}{2\pi R_0} \sum \int_{K_0} u_n(z, S_p(z_0))\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi R_0} \int_K W_n(z, z_0)\, ds$$

上式ヨリ Harnack ノ定理ニヨリ $n \to \infty$ ノトキ $W_n(z, z_0)$ ガ調和函數 $W(z, z_0)$ ニ一様收斂スルコトヲ知ル。

$S_p(z_0) \neq 0$ ノトキ $\sum u(0, S_p(z_0)) = \sum \log \frac{1}{|S_p(z_0)|}$ ハ收斂ス。

故ニ Harnack ノ定理ニヨリ $\sum_{p=0}^{\infty} u(z, S_p(z_0))$ ハ存在ス。

$$u(z, S_p(z_0)) > u_n(z, S_p(z_0))$$

$$\therefore \quad \sum_{p=0}^{\infty} u(z, S_p(z_0)) > \sum_p u_n(z, S_p(z_0)) = W_n(z, z_0)$$

$$\therefore \quad \sum u(z, S_p(z_0)) \geqq W(z, z_0) \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

他方 $\lim_{n\to\infty} u_n(z, S_p(z_0)) = u(z, S_p(z_0))$ ナルコトヲ容易ニ知ル。

故ニ $n \geqq n_0$ ノトキ N ヲ充分大キナ正ノ整數，ε ヲ任意ノ正數トスレバ

$$u(z, S_p(z_0)) - u_n(z, S_p(z_0)) < \frac{\varepsilon}{N}$$

$$(\rho = 0, 1, 2, \cdots\cdots N)$$

$$\therefore \quad \sum_{\rho=0}^{N} u_n(z, S_\rho(z_0)) > \sum_{\rho=0}^{\rho=N} u(z, S_\rho(z_0)) - \varepsilon$$

一方 $$\mathbb{W}(z, z_0) \geqq \sum_{\rho=0}^{\rho=N} u_n(z, S_\rho(z_0))$$

$$\therefore \quad \mathbb{W}(z, z_0) \geqq \sum_{\rho=0}^{\rho=N} u(z, S_\rho(z_0)) - \varepsilon$$

$$\therefore \quad \mathbb{W}(z, z_0) \geqq \sum_{\rho=0}^{\infty} u(z, S_\rho(z_0))$$

(4) ト上式ヨリ

$$\mathbb{W}(z, z_0) = \sum_{\rho=0}^{\infty} u(z, S_\rho(z_0)) = \sum \log \frac{|1 - z S_\rho(z_0)|}{|z - S_\rho(z_0)|}$$

第 二 章

第一章ノ第一型，第二型ハフックソイド群ニ從屬スルモノデ K_n ノトリカタニハ無關係デアルコトガ分リマス。

コノ第一章ノ結果ヲ利用シ，先ヅ Nevanlinna[1] ノ Beschränktartig Gebiet ノ理論ヲ平面上ニ限ラズ hyperbolische Riemann Manifaltigkeit[2]

---

(1) Nevanlinna Eindentige Analytische Funktionen P. 201—206

(2) Koebe Acta Math 1926—1927

ニ擴張致シマス。然シ以下ニテハ Fundamental group ハ楕円的変換ヲモ含ム一般ノ型ニテ論ジテ見タイト思ヒマス。

Riemann 面デノ Hauptuniformisierende ニ関スル群 Γ ニツイテ第一型，第二型ト云フノハ言ヒ換ヘレバ，ソノ Riemann 面上ニ Green 函数ガ存在セザルカ又ハ存在スルコトニナル譯デス。

更ニコノ章ニテハ混雑ノ恐ナキ限リ前章ノ記号及ビ假定ヲ使用スルコトニ致シマス。

(1) 補助定理

フクソイド群ガ第一型ノトキ，有界ナ調和函数 $u(z)$（但シ必ズシモ $u(z)$ ハ Γ ニ関シテ Automorphic トハ限ラズ）ガ存在シ

K_n^ρ 上デ　$u(z)\geqq 0$　ナラバ

単位円内ノ D_n 内デ常ニ　$u(z)\geqq 0$ ナリ。

コヽニ D_n ハ K_n^ρ ($\rho=0,1,2,\cdots\cdots$) ト単位円デ境界サレタ領域ヲ表ハス。

証明

$|u(z)|\leqq M$ トス　　但シ M ハ有界ナ常数

前章ノ $\omega_n^i(z)$ ヲ用ヒテ D_n^i デ次ノ調和函数ヲ考ヘル。

$$U(z)=\frac{u(z)+M}{M}-\omega_n^i(z)$$

D_n^i ノ境界ニテ $U(z)\geqq 0$ ナルコトヲ知ル。

故ニ D_n^i 内ニテ

$$\frac{u(z)+M}{M} \geqq w_n^i(z)$$

上式ハ i ノ如何ニ関セズ成立スル故 $i \longrightarrow +\infty$ トスレバ

Γ が第一型ナルコトヨリ $\lim_{i\to\infty} w_n^i(z) \equiv 1$

$$\therefore \quad \frac{u(z)+M}{M} \geqq 1$$

$$\therefore \quad u(z) \geqq 0$$

定理 1.

Γ が第一型ノ群ナルトキハ Γ ノ有界ナ常数ナラザル automorphic ナ調和函数ハ存在シ得ナイ。

証明

假定ニ反スル $u(z)$ が存在スルモノトス。

$|u(z)| \leqq M$ トス。

$u(z)$ ニ常数ヲ加減シテ m ヲ充分小ナル正数トスルトキ $u(z)$ ハ $(-m, m)$ ノ間ノ値ヲスベテトルモノト假定シテモ一般性ヲ失ハズ、且ツ $m \leqq M$ トス。

$u(z)$ が σ_0 内ノ一点 z_0 ニテ $u(z_0)=0$ トス。

z_0 ノ近クニ充分小サイ円 K ヲトリソノ周上ニテ $u(z) \geqq 0$ ナル如クナラシメ得。

円 K ノ中心が原点ナラザルトキハ適當ナ単位円ヲ自分自身ニ移ス一次変換ヲ施シ原点ニ移ス、然ルトキ第一型,

第二型ノ型ハ不変ナルKヲK_nト考ヘテ論ジテヨロシイ。

故ニ補助定理ヨリD_n内デ$u(z) \geqq 0$トナル。

$u(z)$ハ$K_n(K)$周上デ$u(z) \geqq 0$中ニテ調和ナル故内部ニテモ　$u(z) \geqq 0$

故ニK_n^ρノ内部周上デ常ニ　$u(z) \geqq 0$

然ルニ$u(z)$ハ$(-m, 0)$ノ値ヲトル故コレハ明ラカニ不合理ナリ。

故ニΓノ有界ナ常数ナラザル automorphic ナ調和函数ハ存在セズ。

次ノ系ヲ得。

系1. Hyperbolische Riemannsche Mannifaltigkeit ノ上ニGreen函数ガ存在セザレバソノ上デ有界ナ調和函数ハ存在セズ。

故ニ

系2. 閉ヂタ Riemann 面上ニテ有界ナ調和函数ハ存在セズ。

連結度ガ3又ハ3ヨリ大ナレバ Hyperbolish Riemann Mannifaltigkeit ナル故 Nevanlinna ノ定理。

系3. Nicht Beschränktartig Gebiet ノ上ニハ有界ナ調和函数ハ存在セズ。

系4. Hyperbolish Riemann Mannifaltigkeit ノ上ニテ有界ナ調和函数ガ存在スレバ Green 函

數ガ存在ス。

定理2. $v(z)$ ヲフックソイド群 Γ ニ屬スル automorphic function トス。$T(r,v)=O(1)$ ナラバ Γ ガ第二型ナリ。

証 $T(r,v)=O(1)$ 故ニ $N(r,a)=O(1)$

$v(z)$ ノ a 点ノ内一ツノ基本領域内ニ存在スル任意ノ一ツヲ z_0 トス。

然ルトキ $v[S_\rho(z_0)]=v(z_0)=a$

故ニ $S_\rho(z_0)$ モ亦 a 点ナリ。

$N(r,a)=O(1)$ ナル故 $v(z)$ ノ a 点ノ全体ヲ $z_0, z_1, \cdots\cdots, z_n \cdots\cdots$ トスレバ

$$\sum \log \frac{|1-\bar{z}_n z|}{|z-z_n|}$$ ハ (z_n) ヲ除キ收斂ス

然ルニ $$\sum \log \frac{|1-\bar{S}_\rho(z_0)z|}{|z-S_\rho(z_0)|} < \sum \log \frac{|1-\bar{z}_n z|}{|z-z_n|}$$

故ニ $W_n(z)$ ガ存在シ第二型ナリ。

定理3.

$v(z)$ ハ Γ ノ automorphic function デ次數（基本領域デ $v(z)$ ガ或ル値ヲトル回數）ガ有限ナラバ，

Γ ガ第一型ナルカ，第二型ナルカニ從ヒ $T(r,v)$ ハ $r\to 1$ ノトキ ∞ ナルカ $O(1)$ ナリ。

証．定理2ヲ用ヒテ容易ニ証明シ得ル故省略ス、次數ガ1ノトキ Nevanlinna ノ定理ヲ含ム訳デス。

定理4.

Γガ第一種ナラバ Automorphic function $v(z)$ ノ Picard 意味ノ除外値ハ Capacity 0 ナリ。

証　高々 n 回トラレル a ノ集合ヲ E_n トスレバ E_n ノ内 Capacity ガ正ナルモノガ少クトモ一ツ存在ス. コノ E_n ニ関スル Robin ノ問題ニ對スル mass 分布函数ヲ μ トスレバ

$$T(r, v) = \int_{E_n} N(r, a)\, d\mu + O(1) \qquad 但シ \int_E d\mu = 1$$

a ガ E_n ニ属スレバ $N(r, a)$ ハ一様有界トナル。

故ニ $T(r, v) = O(1)$

故ニ定理2ヨリ Γ ハ第二型トナリ假定ニ反ス。

定理5ヲ証明スルタメ次ノ補助定理ヲ Privaloff ノ方法ニヨリ証明シマス。

補助定理

$|z| < 1$ デ $f(z)$ ハ有理型函数トス。

Winkel grenzwert

$$\lim_{z \to e^{i\varphi}} f(z) = f(e^{i\varphi}) = 0$$

ナル φ ノ集合ヲ E トスルトキ $m(E) > 0$ ナラバ

$$f(z) \equiv 0$$

証明　$f(z) \not\equiv 0$ トス。

E上ノ点 $z_0 = e^{i\varphi_0}$ ニ於テ単位円ト $45°$ ヲナスニツノ弦ヲヒキ，次ニ z_0 中心トシ $\frac{1}{n}$ ヲ半径トスル円ヲ作リ出来タ扇形内ニテ

$$f_n(z_0) = Max\,|f(z)|$$

然ルトキ $f_1(z_0),\ f_2(z_0), \cdots\cdots f_n(z_0) \cdots\cdots$ ハE上デ 0 ニ収斂スル故 Egoroff ノ定理ニヨリEノ部分集合 $\overline{E}$ ニテ一様収斂ナラシメ得，且ツ $m(\overline{E}) > 0$

$\overline{E}$ ノ点ヲ頂点トシ単位円ト $45°$ ヲナス二弦ヲヒキ出来タ領域ヲDトス。

D内ニハ $f(z)$ ノ Pole ノ数ハ有限個ナリ。ナントナレバ Pole ノ数が無限個ナラバ集合 $\overline{E}$ ノ外ハDノ境界ハ単位円内ニ在ル故 $\overline{E}$ ノミ一系積点ヲ持チ得ル。然ルニ $\overline{E}$ ノ点デ Grenzwert 0 ナル故コレヲ不可能ナリ。故ニD内ノ Pole ノ数ハ有限個ナリ。

故ニ適當ナ整式ヲカケテ Pole ヲ除去スル、ソノトキ $\overline{E}$ ニ於ケル Grenzwert ハヤハリ 0 ニナル、コノ函数ヲアラタメテ $f(z)$ トス。

Dヲ単位円 $(|Z|<1)$ ノ内部ニ一對一ニ等角ニ移ス $f(z)$ ハ $F(Z_1)$ ニ，$\overline{E}$ ハ E' ニ移ルモノトス。

$m(\overline{E}) > 0$ ナル故 Riesz ノ定理ニヨリ

$$m(E') > 0.$$

$f(z)$ ハDノ境界ヲ含メテ連續ナル故 $F(Z)$ ハ $|Z| \leqq 1$ ニテ連續ナリ

故ニ $|Z| \leqq 1$ デ $|F(Z)| < 1$ ト假定シ得。

(1) $F(Z)$ ガ 0 点ヲ有セザルトキ

$\log|F(Z_1)| = U(r, \theta)$ トス. 但シ $Z = re^{i\theta}$

$$U(r, \theta) = U_\rho(r, \theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho, \alpha) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)} d\alpha$$

但シ $\rho > r$

$$U(\rho, \alpha) < 0 \qquad \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)} > \frac{\rho - r}{\rho + r}$$

故ニ $\rho \to 1$ ノトキ E' 上ノ α ニ対シテハ一様ニ $U(\rho, \alpha)$
$\longrightarrow -\infty$

$$\therefore \quad U(r, \theta) = -\infty$$

トナリ不合理ナリ。

(2) $F(Z)$ ガ零点ヲ有スルトキ

ρ ヲ適當ニトリ原点ヲ中心トシ ρ ヲ半径トスル円周 C_ρ 上ニハ零点ガナイ様ニスル。

$$U(r, \theta) = U_\rho(r, \theta) + V_\rho(r, \theta) \qquad \rho > r$$

V_ρ ハ C_ρ 上デ 0, C_ρ ノ内部ニテ $F(Z) = 0$ ナル点ノミニテ $-\infty$ トナル。

ρ ヲ上ノ條件ノモトニ 1 ニ近ヅケルト (1) ノトキ同様 $-\infty$ トナル、コレモ不合理ナリ。

故ニ $F(Z) \equiv 0 \qquad \therefore \quad f(z) \equiv 0$

定理 5. Γ ガ第一種ナラバ Γ ノ automorphic function ヲ $v(z)$ トスレバ Winkelgrenzwert

$$\lim_{z\to e^{i\varphi}} v(z) = v(e^{i\varphi})$$

ガ存在スル φ ノ集合ヲ E トスレバ $m(E) = 0$ ナリ。

(注意) Nevanlinna ノ p. 204 ノ証明ト殆ンド平行ニ行ヘマス。便利上二段ニ分ッテヤリマス。

証.

(一段) $0 < m(E) < 2\pi$ ナラバ

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_E \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta \quad (z = re^{i\varphi})$$

ヲ考ヘルト

$u(z)$ ハ $0 \leqq u(z) \leqq 1$ ナル常数ナラザル調和函数ニナル。

Γ ノ要素 S ヲ E ニ施セバ $v(z)$ ガ Automorphic function ナル故 $S(E)$ ニテモ Winkelgrenzwert ガ存在ス.

然ルニ E ハ Winkel grenzwert ノ存在スル全体ノ集合ナル故 $E = S(E)$ ナリ。

被積分函数モ S ヲ施セバ同様ノ函数ニナル故 $u(z)$ ハ Automorphic ナ調和函数トナル。Γ ガ第一種ナラバ定理 (1) ニ依リ有界ナ調和函数ハ存在セズ、コレハ不合理ナリ。故ニ $m(E) = 0$ カ又ハ $m(E) = 2\pi$ ナリ。

(二段) Γ ニヨリ不変ナ集合 E ガ単位円周ニ存在シ、

$0 < m(E) < 2\pi$ ナラバ一般ノ証明ニ帰スルコトガ出来ル故 $m(E) = 2\pi$ ナルトキ，カヽル集合ノ存在ヲ証明スレバ証明ハ完了スル訳デス。

$m(E) = 2\pi$ トス.

$v(z) = \sigma + it$ トス。

$$\frac{m}{p} \leqq \sigma < \frac{m+1}{p}, \qquad \frac{n}{p} \leqq t < \frac{n+1}{p}$$

$$(m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\cdots)$$

ナル正方形ヲ $Q(m, n, p)$ トス.

$v(z)$ ノ Winkel grenzwert ガ $Q(m, n, p)$ ノ中ニ入ル φ ノ集合ヲ $\varphi_{m,n,p}$ トス。

$p = 1, 2, \cdots\cdots$ ト変ヘルトキ $\varphi_{m,n,p}$ ノ集合ノ測度ガ 0 ト 2π ノ間ニ在ルモノガ存在ス。

然ラズトスレバ p ノ全テニ対シ $\varphi_{m,n,p}$ ノ集合ノ測度ハ 2π デ $Q(m, n, p)$ ハ順次ニ含マレテ共通点 v_0 ヲ有スルコトニナル.

然ルトキ $v(z)$ ハ $|z| = 1$ 上デ測度 2π ノ集合上デ Winkel-grenzwert v_0 ヲ有スルコトニナル.

然ラバ豫備定理ニヨリ $v(z) \equiv v_0$ トナル。

コレ假定ニ反ス.

依ッテ $\varphi_{m,n,p}$ ノ測度ハ 0 ト 2π ノ間ニアリ、問題ノ E ナルコトヲ容易ニ知ル. 故ニ $m(E) \neq 2\pi$

$$\therefore \quad m(E) = 0$$

定理6

$v(z)$ が Γ ノ Automorphic function デ次数ガ有限ナラバ Γ ガ第一型，第二型ナルニ従ッテ Winkel-grenzwert ノ存在スル集合ハ測度0又ハ 2π ナリ.

証. 定理3，定理5ヨリ簡単ニ証明シ得. 次数ガ1ナルトキハ Nevanlinna ノ定理ヲ含ムモノトナル。

前後シマスガ次ノ系ヲノベテオキマス。

定理4ヨリ

系5. Green 函数ノ存在セザル Riemann 面上ノ有理函数ハ Capacity 0 ノ値ヲ除イテスベテトル.

全平面ノ有理型函数ノ Picard ノ定理ノ或ル方面ヘノ拡張カト思ヒマス。

定理6ノ系トシテ

系6. Geschlecht p ガ有限ナル閉ヂタ Riemann 面ニ含マレル Riemann 面ヲ R トス.

R ノ境界ガ存在スルモノトシ，ソレヲ E トスレバ E ハ R ノ Hauptuniformisierende ニヨリ

Green 函数ガ存在スルカ、然ラザルカニ依リ単位円周上ノ測度 2π 又ハ 0 ナル集合ニ写像サレル.

一般ノ境界ニツイテ定義ソノ他ノ事項ヲ要シマスノデモウ少シ考ヘテカラ発表シタイト思ヒマス。

ソノ内ノ一部分トシテ次ノ事ハ言ヘマス。

系7. Riemann 面 R ガ他ノ Riemann 面 $\bar{R}$ ニ

(Geschlecht p ハ有限ト限ラズ) 含マレ R ノ境界ガ R' ノ内点デアルトス。

然ルトキ R' ニ関スル Green 函数ガ存在セザレバ Hauptuniformisierende ニヨリソノ境界ハ単位円周上ノ測度 0 ナル集合ニ寫像サレル。

Orthosymmetrische Riemann Fläche R ノ Symmetrische ナ半分ヲ R' トシ、Rデ Green 函數ガ存在シナイトキハ、モット正確ニ次ノ如ク言ヘマス、Hauptuniformisierende ノ群ノ limit Point ノ集合ハ Capacity 0 ナリ。擴張サレタ Schottky Type ノ問題ニツイテモ同様ナコトガ言ヘマス。

証明ハ後ノ発表（第二報カ又ハ第三報）ニノセタイト思ヒマス。

誤リ訂正

代数曲線ノ Uniformisation ニツイテ（其ノ三）ニ於テ $p=1$ ノトキツイテナシテ Riemann 面上ノスベテノ値ヲトルト云フノハ誤リデーツヲ除イテスベテノ値ヲトルト訂正シマス。